Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorème limite. Exemples et application.

RM
2022-2023

On considère sauf mention contraire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne avec des variables aléatoires réelles.

1 Modes de convergences d'une suite de variables aléatoires

1.1 Convergence presque sûre

Définition 1 : Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ converge presque sûrement (p.s) vers la variables aléatoires X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$. Dans ce cas, on note $X_n \overset{p.s}{\to} X$ lorsque $n \to +\infty$.

Proposition (Critère de Cauchy) 2 : On a que $X_n \overset{p.s}{\to} X$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\geq n} \{|X_n - X_m| < \varepsilon\}\right) = 1$.

Remarque 3 : On peut ici déterminer si une suite (X_n) converge presque surement sans connaître sa limite (comme les suites de Cauchy dans un banach ?!).

Exemple 4 : Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$. Soit $U_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^i}$. Le critère de Cauchy permet de prouver que (U_n) converge presque sûrement.

Proposition (Lemme de Borel-Cantelli) 5 : Soient X_n et X des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$i)$ Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) < +\infty$, alors $X_n \overset{p.s}{\to} X$.

$ii)$ Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_n \overset{p.s}{\to} 0$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{|X_n| \geq \varepsilon\}) < +\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque 6 : On obtient à partir du lemme de Borel-Canteli classique. Ce lemme est très souvent utilisé pour montrer une convergence presque sûre.

Application 7 : Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires iid de loi exponentielle $\mathbb{P}(X_i > t) = e^{-t}, t \geq 0$. Soit $M_n = \max\limits_{i\in[\![1\,;n]\!]} X_i$. On a alors que $M_n/\ln n \overset{p.s}{\to} 1$.

1.2 Convergence en probabilité

Définition 8 : On dit que X_n converge en probabilité vers X, et on note $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

Exemple 9 : Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ non corrélées, avec $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $Var(X_i) = \sigma^2$. Alors on a que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers 0.

Exemple 10 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli, avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p_n$. Alors $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Définition 11 : Soit X et Y deux variables aléatoires. On définit une distance $d(X,Y) = \mathbb{E}[\min(|X-Y|, 1)]$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Lemme 12 : La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(X_n, X) = 0$.

Remarque 13 : On a que $d(X,Y) = 0$ ssi $X = Y$ p.s. On a donc que $d(.,.)$ est une distance si on quotiente par la relation d'équivalence être égale p.p.

Théorème 14 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire vérifiant le critère de Cauchy en probabilité, ie que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}(|X_n - X_{n_0} \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$ ou $d(X_n, X_{n_0}) \leq \varepsilon$. Alors X_n converge en probabilité.

1.3 Convergence dans L^p

Définition/Remarque 15 : On rappel que X est dans $L^p(\mathbb{P})$ si $\mathbb{E}[|X|^p]$ est fini avec $p > 0$. On muni alors $L^p(\mathbb{P})$ de la norme $\|X\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$. C'est un espace complet par le théorème de Riesz-Fisher.

Définition 16 : Soient $(X_n)_{N\in\mathbb{N}}, X$ des variables aléatoires dans $L^p(\mathbb{P})$ avec $p \in]0, +\infty[$. On dit que X_n converge vers X dans L^p si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_p = 0$, ou de façon équivalente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$. On note $X_n \overset{L^p}{\to} X$.

Remarque 17 : La convergence L^p implique la convergence en probabilité. Par contre, la convergence p.s et proba n'implique pas la convergence L^p.

Exemple 18 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ de loi $(1 - n^{-p})\delta_0 + n^{-p}\delta_n$ pour $p > 1$. Si $\varepsilon > 0$, pour tout $n \geq 1/\varepsilon$, $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = n^{-p}$, et comme $p > 1$, $X_n \overset{p.s}{\to} 0$ par Borel-Cantelli. En revanche, $\mathbb{E}[|X_n|^p] = 1$ pour tout n.

1.4 Convergence en loi

Définition 19 : On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles convergent en loi vers X si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \to \mathbb{E}[\varphi(X)]$ quand n tends vers $+\infty$.
On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Théorème (de Lévy) 20 : Soit X,$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles, alors on a équivalence entre :

i) X_n converge en loi vers X.
ii) La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ_X.

Remarque 21 : Ce théorème est très pratique, car il est plus simple de montrer une convergence simple que la convergence en loi.

Proposition 22 : On a X_n converge en loi vers X si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point de continuité t de F_X.

Exemple 23 : Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $X_n = (-1)^n X$. Alors X_n converge en loi vers X.

Proposition 24 : Si (X_n) et X à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors X_n converge en loi vers X si et seulement si $\lim\limits_{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2 Liens entre les différentes convergences

2.1 Implications directes

Proposition 25 : Si une suite (X_n) converge presque sûrement vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

Contre-Exemple 26 : La réciproque est fausse en générale. Si (X_n) suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$, alors X_n converge vers 0 en probabilité, mais ne converge pas presque sûrement vers 0.

Proposition 27 : Si $p < q$ et que X_n converge vers X dans L^q, alors X_n converge vers X dans L^p.

Contre-exemple 28 : La réciproque est fausse en générale. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n(\omega) = \sqrt{n}$ si $\omega \in]0, 1/n[$ et 0 si $\omega \in [1/n, 1[\times\{0\}$. Alors on a $\mathbb{E}[X_n] = 1/\sqrt{n}$ qui tends vers 0 dans L^1 mais $\mathbb{E}[X_n^2] = 1$ ne tends pas vers 0 dans L^2.

Proposition 29 : Si la suite X_n converge dans L^1 vers X, alors X_n converge presque sûrement vers X.

Contre-exemple 30 : La réciproque est fausse en générale. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n(\omega) = n$ si $\omega \in]0, 1/n[$ et $X_n(\omega) = 0$ si $\omega \in [1/n, 1[\times\{0\}$. Alors X_n converge presque surement vers 0 mais $\mathbb{E}[X_n] = 1$ qui ne tends pas vers 0, donc ne converge pas vers 0 dans L^1.

Proposition 31 : Si X_n converge en probabilité vers X, alors X_n converge en loi vers X.

Contre-exemple 32 : La réciproque est fausse en générale. Si (X_n) est une suite de variable aléatoire deux à deux indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, alors X_n converge vers X une v.a de Bernoulli en loi, mais pas en probabilité.

2.2 Réciproques sous condition

Théorème 33 : X_n converge en probabilité vers X si et seulement si on peut extraire une sous-suite $X_{\varphi(n)}$ avec φ une extractrice telle que $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s} X$.

Définition 34 : Une famille quelconque $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires réelles, définies et intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite équiintégrable ou uniformément intégrable si $\lim\limits_{c\to+\infty} \sup\limits_{i\in I} \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0$.

Proposition 35 : La famille de variables aléatoires réelles intégrables $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si :

i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \leq \eta$ implique $\forall i \in I, \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leq \varepsilon$.
ii) $\sup\limits_{i\in I} \int_\Omega |X_i| d\mathbb{P} < +\infty$.

Théorème 36 : Soient (X_n) une suite de variables aléatoires intégrables. Alors on a équivalence :

i) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}}$ et la famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.
ii) X est intégrable et X_n converge vers X dans L^1.

Corollaire 37 : Soit (X_n) tel que pour un $p > 1$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p] < +\infty$. Si X_n converge vers X en probabilité, alors pour tout $q < p$, X_n converge vers X dans L^q.

Proposition 38 : Si X_n converge en loi vers une variable constante c, alors X_n converge en probabilité vers c.

3 Comportement asymptotique et application

3.1 Les théorèmes limites

On se place avec $(X_i)_{i\geq 1}$ une suites de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuée. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Remarque/Exemple 39 : On a déjà que S_n/n est la moyenne des X_i. Si X_i modélise le fait qu'un individus vote ou non avec $X_i = 1$ si vote et $X_i = 0$ si non vote, alors S_n/n est la proportion de personne ayant voté.

Théorème (loi faible des grands nombres) 40 : Si $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$, alors S_n/n converge en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$ lorsque $n \to +\infty$.

Théorème (loi forte des grands nombres) 41 : Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$.

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n/n = \mathbb{E}[X_1]$ p.s.

Application (Méthode Monte-Carlo) 42 : Soit $g : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que g^2 est intégrable. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]^d$.
Alors la suite $(1/n \sum_{i=1}^n g(X_i))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement (et dans L^1) vers $I = \int_{[0,1]^d} g(x)dx$.

Théorème (de Lévy) 43 : Soit X,$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles, alors on a équivalence entre :

i) X_n converge en loi vers X.

ii) La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ_X.

Développement (Théorème Centrale Limite) 44 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire réelle indépendantes et identiquement distribuées admettant des moments d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. En posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,on a alors **Dev 1**

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Théorème (limite central poissonien) 45 : Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$, S_n converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ.

3.2 Une application de convergence

Théorème (Inégalité de Hoeffding) 46 : Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, bornées $\mathbb{P}$-p.s et centrées; on suppose que $|X_n| \leq c_n$ $\mathbb{P}$-$p.s$, avec $c_n > 0$. On note $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a **Dev 2**

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right).$$

Application 47 : Soit $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$.
Alors on a que

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0.$$

Références :

1. Probabilité Barbe
2. De l'intégration aux probabilités Garet
3. Probabilité tome 2 Ouvrard
4. Contre-exemple Hauchecorne
5. Analyse pour l'agrégation ZQ